

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

\*\*\*

Ministère de l'Enseignement  
Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux  
Cycles de Formation d'Ingénieurs  
Session: Juin 2001

Concours en Physique et Chimie

Épreuve de Mathématiques

Durée: 4H Date: 7 Juin 2001 8Heure Nb pages: 5  
Barème: Ex: 4pts Pb Partie I: 4,5pts Partie II: 6pts, Partie III: 5,5pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice.

Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit  $\mathbb{R}_n[X]$  celui des polynômes de degré au plus égal à  $n$ .

Pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\langle P/Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ .

1) Montrer que  $\langle / \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

(On vérifiera l'existence de l'intégrale ci-dessus.)

2) On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]. \quad (1)$$



Vérifier que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$$

1/5

3) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant l'égalité (1), établir :

$$\langle L_n/P \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n P^{(n)}(x) dx.$$

4) Montrer que pour tout entier  $n$ , la famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

5) Réciproquement, soit une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$  possédant les propriétés suivantes :

$$i) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle e_n/e_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

(symbole de Kronecker).

$$ii) \forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(e_n) = n.$$

$$iii) \forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n(0) \geq 0.$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = L_n$ .

Les polynômes  $L_n, n \in \mathbb{N}$  sont appelés les polynômes de Laguerre.

### Problème

**Partie I.** Soit  $\lambda$  un nombre réel appartenant à  $]0, 1[$ . On pose

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt; \quad J(\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt.$$

1) Justifier l'existence de  $I$  et  $J$  et montrer que

$$I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda).$$

2) a) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$J(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda}.$$

$$d) \text{ Etablir que } I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2}.$$

3) Soit  $f_\lambda$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f_\lambda(t) = \cos(\lambda t), \quad \text{pour tout } t \in [-\pi, \pi].$$

$$2/5$$

a) Chercher les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f_\lambda$ .

b) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f_\lambda(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \left[ 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2} \cos(nt) \right].$$

c) Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \lambda^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[n^2 - \lambda^2]^2}.$$

4) En déduire que  $I(\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$ .

**Partie II.** On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1) a) Montrer que la fonction  $\Gamma$  est bien définie pour  $x > 0$  et que

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Sachant que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , montrer que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

c) Soient  $\alpha, \beta, x$  des réels strictement positifs. Montrer que

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} dt = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

2) Soient  $\alpha, \beta$  des réels strictement positifs et  $h : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe  $x_0 > 0$  tel que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} |h(t)| dt < +\infty.$$

a) Soit  $\eta > 0$ . Montrer que  $\forall x > x_0, \forall t > \eta$ ,

$$\exp(-xt^\beta) \leq \exp(-x_0 t^\beta) \exp(-(x - x_0)t^\beta).$$

b) En déduire que  $\forall x > x_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| &\leq \int_0^\eta e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt \\ &+ e^{-(x-x_0)\eta^\beta} \int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt. \end{aligned}$$

c) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} h(t) dt = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) h(0). \quad (2)$$

3) On pose pour  $t > 0$ ,  $\varphi(t) = t - 1 - \text{Log}(t)$ .

a) Montrer que  $\forall t > 0, t \neq 1, \varphi(t) > 0$ , et que

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt.$$

b) Soient  $k_1$  et  $k_2$  les fonctions définies par

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \sqrt{\varphi(t)}, t \in [1, +\infty[ \\ k_2(t) &= \sqrt{\varphi(t)}, t \in ]0, 1] \end{aligned}$$

Montrer que  $k_1$  est une bijection croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$  et que  $k_2$  est une bijection décroissante de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  leurs fonctions réciproques respectives.

c) Montrer que pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} f_1'(s) ds \\ \int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt &= - \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} f_2'(s) ds. \end{aligned}$$

d) En appliquant l'égalité (2) pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ , aux fonctions  $h_1$  et  $h_2$ , définies par

$$h_1(t) = \begin{cases} f_1'(t), & \text{si } t > 0 \\ \sqrt{2}, & \text{si } t = 0 \end{cases}; \quad h_2(t) = \begin{cases} f_2'(t), & \text{si } t > 0 \\ -\sqrt{2}, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \sqrt{2\pi}.$$

4) a) Dédurre de la troisième question la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-s} \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} = 1, \quad s > 0.$$

**Partie III.** On considère la fonction bêta  $\beta : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  définie par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

1) a) En intégrant par parties, montrer que  $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$ .

b) En utilisant l'égalité  $(1-t)^y = (1-t)^{y-1} - t(1-t)^{y-1}$ ,  $y > 0$ ,  $t \in ]0, 1[$ ,  
montrer que  $\beta(x, y+1) = \beta(x, y) - \beta(x+1, y)$ .

c) En déduire que  $\beta(x, y) = \frac{x+y}{x} \beta(x+1, y)$ .

d) Montrer par récurrence sur  $n$  que

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \frac{\Gamma(x+y+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \beta(x+n+1, y).$$

2) a) En effectuant le changement de variables  $t = e^{-u}$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta(x+n+1, y) = \int_0^{+\infty} e^{-u(x+n+1)} u^{y-1} \left( \frac{1-e^{-u}}{u} \right)^{y-1} du.$$

b) En utilisant l'égalité (2), montrer que pour tout  $y > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^y \beta(x+n+1, y) = \Gamma(y).$$

c) En déduire la formule d'Euler  $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ .  $\dagger$

3) a) En effectuant le changement de variables  $s = \frac{t}{1-t}$ , montrer que

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds.$$

b) En utilisant la question I-4, déduire la formule des compléments

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

4) a) Montrer que  $\beta(x, x) = 2 \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1} dt$ ,  $x > 0$ .

b) En effectuant le changement de variables  $s = 4t(1-t)$ , montrer que

$$2^{2x-1} \beta(x, x) = \beta(x, 1/2), \quad x > 0.$$

c) En déduire la formule de duplication de Legendre,

$$\Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}), \quad x > 0.$$