Programme de Mathématique

Préparation Physique-Chimie &Technologie

Algèbre Et Géométrie

<u>Deuxième Année</u>

I. ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels, applications linéaires
2. Déterminants
3. Travaux pratiques

II. Réduction des endomorphismes

1. Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme
2. Réduction d'un endomorphisme
3. Travaux pratiques

III. Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

1. Espaces préhilbertiens réels
2. Espaces euclidiens
3. Travaux pratiques

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes ; bases, dimension et rang ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations et des transformations géométriques …).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (issus de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire) ainsi que l 'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE AFFINE

Le programme est organisé autour de quatre objectifs.

- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires projecteurs, algèbre) ; étude des concepts fondamentaux relatifs aux espaces vectoriels de dimension fine (bases dimension, rang, déterminants, calcul matriciel) et à la géométrie affine réelle (sous-espaces affines, barycentre).

- Etudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels. Trace et déterminant d'un endomorphisme .
- Explorer les résultats obtenus pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes, des algèbres ; interpolation) et de l'analyse (récurrences linéaires et équation différentielles linéaires).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires), et le point de vue matriciel.

Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Dans cette partie, le corps de base K est R ou C.

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

Bases, sommes directes

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum_{i\in I} E_i$, d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel *E* ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Lorsque E est de dimension finie et que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe $dim \oplus E_i = \sum dim E_i$ Définition d'une base d'un espace vectoriel *E* de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel *F* de *E*, à une décomposition en somme directe *E* = $\oplus E_i$.	Dans l'espace vectoriel K$[X]$, le sous-espace vectoriel K$[X]$.*P* constitué des multiples d'un polynôme *P* de degré *n*+1 admet pour supplémentaire le sous-espace vectoriel K$_n[X]$, constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à *n*. Alors pour que *E* = $\oplus E_i$, il faut et il suffit que $dim \boldsymbol{E} = \sum dim E_i$

Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$. Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \dots a_n)$ d'éléments de K distincts deux à deux, où K est un sous-corps de C. Définition du rang d'une application linéaire u de E dans F, lorsque F est de dimension finie. Définition de l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E. Définition d'un hyperplan H de E. Etant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \ker\varphi$ est un hyperplan de E ; toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.	Soit u l'application de $K[X]$ dans K^{n+1} définie par $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots P(a_n))$. Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod (X - a_j)$; en outre u définit un isomorphisme de $K_n[X]$ sur K^{n+1}. Lorsque E est de dimension finie, relation $dim \operatorname{Im} u + dim \ker u = dim E$ caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. La dimension de E^* est égale à celle de E. Equations d'un hyperplan.

Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations $Tr(AB) = Tr(BA)$ et $Tr PMP^{-1} = Tr M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

2. **Déterminants**

L'objectif de ce chapitre est de consolider les acquis de la classe de première année sur les déterminants en dimension 2 ou 3, et d'étendre la notion de déterminant au cas d'un espace vectoriel de dimension *n* .

Le groupe symétrique et la signature sont hors programme.

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels sont de dimension finie sur K.

a. Déterminant de n vecteurs

Formes *n*-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension *n*. Déterminant de *n* vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension *n*. Caractérisation des bases.	La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants. Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer. Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.	

Déterminant d'une matrice carré

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.	La preuve de la relation $\det {}^t M = \det M$ est hors programme.

1. Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de	Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes, de suites et de fonctions.

construction de bases et de sous- espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases notamment pour l'étude des équations linéaires. $ Exemples d'études de problèmes d'interpolation linéaire. $ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires. $ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel. Le calcul de déterminants, l'inversion des matrices.	Il convient de valoriser les interventions en géométrie.

I. Réduction des endomorphismes

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- **Etudier les polynômes d'un endomorphisme *u* et sous-espaces stables par *u*.**
- **Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, en dimension finie ou non.**
- **Etudier les endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
- **Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.**

En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.

Dans cette partie, le corps de base K est R ou C.

1. Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

a. Sous-espaces stables

Définition d'un sous-espace vectoriel *F* stable par un endomorphisme *u* d'un espace vectoriel *E*. Endomorphisme de *F* induit par *u*.	Si les endomorphismes *u* et *v* commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par *v*. Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F. Etant donné un espace vectoriel E de dimension finie et une famille $(E_1, E_2, \dots E_n)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_i par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.	Etant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale ou triangulaire supérieure.

Polynômes d'un endomorphisme

La donnée d'un endomorphisme de E définit un morphisme $P \to P(u)$ de l'algèbre K$[X]$ dans l'algèbre $L(E)$.	Pour tout élément P de K$[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u.

1. **Réduction d'un endomorphisme**

   Aucune connaissance spécifique sur les méthodes de mise sous forme triangulaire n’est exigible des étudiants.

   Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Droites stables par un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur *0* n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda I_E)$ d'un endomorphisme u de E. Si les endomorphismes u et v commutent, les sous- espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v.	La notion de valeur spectrale est hors programme. En dimension finie, λ st une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda I_E$ n'est pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté $Sp(u)$. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre. Etant donnés un endomorphisme *u* de *E* et un élément *P* de K$[X]$, pour toute valeur propre λ de *u*, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u)$ = 0, alors toute valeur propre de *u* est un zéro du polynôme *P*. En dimension finie, automorphisme $u \to aua^{-1}$ de l'algèbre *L*(*E*) défini par un élément *a* du groupe linéaire *GL*(*E*) .	deux à deux est directe. Eléments propres des homothéties des projecteurs, des affinités, des symétries. Relation entre les valeurs (les sous-espaces propres) de *u* et de aua^{-1} .

Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément *M* de M_n(K). Un élément *M* de M_n(R) peut être considéré comme élément de M_n(C) ; le spectre de *M* dans R est contenu dans le spectre de *M* dans C. Automorphisme $M \to PMP^{-1}$ de l'algèbre M_n (K). Définition des matrices semblables. Interprétation géométrique.	Les éléments propres de *M* sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme *u* de K^n canoniquement associé à *M*. Spectre de deux matrices semblables

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.	Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.	

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme *u* diagonalisable : l'espace vectoriel *E* est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. Inversement, si *E* est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels *u* induit une homothétie, alors *u* est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme *u* de *E* soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions de sous-espaces propres de *u* soit égale à $dim E$. Pour qu'un endomorphisme *u* de *E* soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples. Définition d'une matrice carrée *M* diagonalisable. Pour que *M* soit diagonalisable, il faut et il suffit que *M* soit semblable à une matrice diagonale.	Un endomorphisme *u* est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de *u*, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de *u* et diagonale. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Lorsque *M* est diagonalisable, *M* s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où *D* est diagonalisable et *P* désigne la matrice de passage de la base canonique de K^n *à* une base de vecteurs propres de *M*.

2. Travaux pratiques

	Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence

$ Exemple d'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Exemples d'étude de matrices ou d'endomorphismes qui annulent un polynôme. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs). $ Exemples de réduction à la forme diagonale de matrices carrées sur C ou sur R. $ Exemples d'étude du comportement des puissances *n*-ièmes d'une matrice..	$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

I. Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- **Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.**
- **Etendre ces notions au cas des espaces euclidiens de dimension *n*.**
- **Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.**
- **Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et la géométrie.**

Il convient d'illustrer les notions et les résultats sur les espaces vectoriels euclidiens par de nombreuses figures.

1. Espaces préhilbertiens réels

L'objectif de ce chapitre est double :

- **Consolider les notions de base abordées en classe de première année concernant le produit scalaire, la norme associée et l'orthogonalité ; introduire le concept de sommes directes orthogonales.**
- **Etendre brièvement ces notions au cas du corps complexes.**

a. Produit scalaire

Produit scalaire sur un R-espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées. Relations entre produit scalaire et norme, polarisation. Produit scalaire $(x, y) \to (x\|y)$ sur un C-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire; norme et distance associées. Relation : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x\|y)$	L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de R^n et les produits scalaires usuels sur les espaces de suites et de fonctions. L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment : • le produit scalaire canonique de C^n ; • le produit scalaire canonique sur l'espace l^2 des suites de carré sommable. • $(f, g) \to (f\|g) = \int_{[a,b]} \overline{f} g$ dans $C([a,b])$; • $(f, g) \to (f\|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \overline{f} g$ dans l'espace vectoriel $C_{2\pi}$ des fonctions continues 2π périodiques sur R à valeurs complexes.

Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal *F*° (ou $F^\perp$) d'un sous-espace vectoriel *F* de *E*. Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux. Somme directe orthogonale d'une famille finie	Familles orthogonales. Familles orthonormales : relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie. Projecteurs orthogonaux associés à une décomposition de *E* en somme directe orthogonale.

de sous-espaces vectoriels. Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.	

1. **Espaces euclidiens**

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- **Consolider l'acquis de première année sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (bases orthonormales, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et de la géométrie euclidienne du plan et l'espace (distances, angles, isométries).**
- **Etendre au cas des espaces vectoriels euclidiens de dimension *n*, les notions de base orthonormale, de projection orthogonale, d'automorphisme orthogonal et de matrice orthogonale.**
- **Etendre les notions de base orthonormale et de projection orthogonale au cas des espaces hermitien (préhilbertiens complexes de dimension finie).**

a. **Bases orthonormales**

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie. Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale. Isomorphisme de *E* sur l'espace dual E^*. Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points. Extension des notions précédentes au cas d'un espace vectoriel hermitien.	Toute forme linéaire *f* sur un espace vectoriel euclidien *E* s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a\|x)$ où *a* est un vecteur de *E*.

Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel *E* (de dimension finie ou non), l'orthogonal F^o d'un	Expression de $p_F(x)$ lorsque *F* est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots e_n)$:

sous-espace vectoriel *F* de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de *F* ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur *x* de *E* sur *F*. Lorsque *E* est de dimension finie, $\dim F^\circ + \dim F = \dim E$ et $F^{\circ\circ} = F$. Définition de la distance de $d(x, F)$ d'un élément *x* de *E* à *F*. Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de *F* associe $\|x-z\|$ atteint son minimum en point et un seul, à savoir $p_F(x)$; Relation $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2$. Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.	$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j \| x) e_j$. Inégalité de Bessel : $\sum_{j=1}^{n} \left\|(e_j \| x)\right\|^2 \leq \|x\|^2$.

1. Travaux pratiques

$ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux. Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace. Exemples d'étude et d'emploi de suites de polynômes orthogonaux. Exemple de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale. Exemples de recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormale.	Il convient d'exploiter les espaces vectoriels R^n et C^n ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions. Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions. Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants.